Zeitschrift für Physik, Bd. 127, S. 363—370 (1950).

Multipolstrahlung als Eigenwertproblem.

Von

WALTER FRANZ, Münster.

(Eingegangen am 12. Dezember 1949.)

Für das Photon lassen sich aus der MAXWELLschen Theorie — ebenso wie für das Elektron aus der DIRACschen — Operatoren für den Bahn- und Spindrehimpuls angeben, für deren Summe ein Erhaltungssatz gilt. Fordert man, daß der Betrag und eine Komponente des Gesamtdrehimpulses für die Lösungen der Feldgleichungen Eigenwerte annehmen, so erhält man in besonders einfacher Weise und in besonders einprägsamer Gestalt die Ausdrücke für die elektrischen und magnetischen Multipole. Der Drehimpuls des so erhaltenen Feldes folgt aus dem Ansatz, während die Herleitung aus einem simultanen Eigenwertproblem die Orthogonalität der verschiedenen Lösungen garantiert.

Die vollständigen Ausdrücke für die elektromagnetischen Multipole sind im wesentlichen bereits 1908 von G. MIE[1] angegeben worden (allerdings unter dem Namen „Partialwellen"), im Jahre 1936 wurde von W. HEITLER ihr Drehimpuls untersucht[2]. Doch scheint bis heute ein besonders einfacher und einleuchtender Weg der Herleitung, welcher einen unmittelbaren Zusammenhang mit dem Drehimpuls herstellt, nicht beachtet worden zu sein; dies ist die Aufstellung eines simultanen Eigenwertproblems. Zur Erläuterung betrachten wir zunächst das Beispiel der skalaren Wellengleichung, für welche die Methode allbekannt ist.

Skalare Wellengleichung.

Die akustische Wellengleichung, ebenso die SCHRÖDINGER-Gleichung für den kräftefreien Fall, lautet

$$(\Delta + k^2)\, u = 0 . \tag{1}$$

Hierin ist Δ der LAPLACEsche Operator, k eine Konstante — die Wellenzahl — und u die Wellenfunktion. — Die Bestimmung der Multipolwellen ist hier identisch mit der Separation in Polarkoordinaten, welche mit Hilfe eines simultanen Eigenwertansatzes vorgenommen werden

---

[1] MIE, G.: Ann. Phys. **25**, 377 (1908).

[2] HEITLER, W.: Proc. Cambridge philos. Soc. **32**, 112 (1936). Freilich ist der Drehimpuls nicht, wie HEITLER (im Widerspruch zu seinen eigenen Formeln) behauptet, im Zwischengebiet zwischen Nah- und Wellenzone enthalten, sondern über den gesamten Raum verteilt. Dies folgt aus unserem Eigenwertansatz, ist aber bereits bei SOMMERFELD [Atombau und Spektrallinien, Bd. I, 5. Aufl. (1931), Zusatz 8] klar ausgesprochen.

kann: man ermittelt zwei mit dem LAPLACEschen Operator und untereinander vertauschbare nur winkelabhängige Differentialoperatoren, und bestimmt die Lösungen so, daß diese beiden Operatoren Eigenwerte besitzen. Zur Lösung dieser Aufgabe verhilft der Operator

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{i}\,\mathfrak{r} \times \nabla . \tag{2}$$

Bis auf einen Faktor $\hbar$ ist dies der wellenmechanische Operator des Drehimpulses, für welchen die für alle Drehimpulsoperatoren charakteristische Beziehung gilt:

$$\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} = i\,\mathfrak{m} . \tag{3}$$

Hieraus folgt unter anderem

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{m}^2\,\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m} \times [\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}] - [\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}] \times \mathfrak{m} = 0 . \tag{4}$$

Das bedeutet, daß $\mathfrak{m}$ mit seinem Quadrat vertauschbar ist, und daher auch mit dem LAPLACEschen Operator, da dieser sich schreiben läßt:

$$\Delta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,r - \frac{\mathfrak{m}^2}{r^2} . \tag{5}$$

Die Komponenten von $\mathfrak{m}$ sind untereinander nach (3) nicht vertauschbar, doch genügen die z-Komponente und das Quadrat von $\mathfrak{m}$ unseren Bedingungen — sie sind untereinander und mit Δ vertauschbar und hängen nur von den Winkeln ab. Die zugehörigen Eigenwertgleichungen lauten:

$$m_z\,u = m\,u , \tag{6}$$

$$\mathfrak{m}^2\,u = l\,(l+1)\,u . \tag{7}$$

(7) ist die Gleichung der Kugelflächenfunktionen. Führen wir ein Polarkoordinatensystem mit z als Polarachse ein, dann wird

$$m_z \equiv \frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial \varphi} . \tag{8}$$

Die simultane Lösung von (1), (6) und (7) ist der 2^l-Pol

$$u_l^m = e^{i\,m\,\varphi}\,P_l^m(\cos\vartheta)\,R_l(r) . \tag{9}$$

Die Gestalt des radialen Teiles der Wellenfunktion $R_l(r)$ interessiert uns hier nicht. Die Funktionen (9) bilden ein vollständiges System, wenn l alle nichtnegativen ganzen Zahlen durchläuft, und m alle ganzzahligen Werte, für welche $|m| \leq l$. Diese Eigenwerte entsprechen in bekannter Weise dem Betrag und der z-Komponente des Drehimpulses. — Daß zwei Lösungen, welche sich durch den Wert von k, l oder m unterscheiden, orthogonal sind, ist eine unmittelbare Folge der Eigenwertgleichungen (1), (6) und (7).

Formulierung des Eigenwertproblems für die MAXWELL*schen Gleichungen.*

Die MAXWELLschen Gleichungen lauten für monochromatische Wellen der Zeitabhängigkeit exp $(-i\,\omega\,t)$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = -i\,\omega\,\varepsilon\,\mathfrak{E}\,; \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = i\,\omega\,\mu\,\mathfrak{H}\,. \tag{10}$$

Durch Elimination können wir für $\mathfrak{E}$ (und ebenso für $\mathfrak{H}$) eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung gewinnen:

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot} - k^2)\,\mathfrak{E} = 0\,. \tag{11}$$

Aus (11) folgt in bekannter Weise, daß jede einzelne kartesische Komponente von $\mathfrak{E}$ der skalaren Wellengleichung genügt; man kann (11) ersetzen durch die Gleichungen

$$(\Delta + k^2)\,\mathfrak{E} = 0\,; \qquad \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0\,. \tag{12}$$

Gewöhnlich geht man bei der Lösung der MAXWELLschen Gleichungen von (12) aus, um die *rechnerisch* einfachere skalare Wellengleichung an Stelle von (11) zu setzen. Wir wollen jedoch bei Gl. (11) bleiben, da diese gegenüber (12) einen entscheidenden *methodischen* Vorzug besitzt: Sie ist *eine* Differentialgleichung für *eine* (wenn auch vektorielle) Funktion, ohne die Nebenbedingung div $= 0$, deren nachträgliche Berücksichtigung lästig fällt.

Wir nehmen nun die Bestimmung der Multipolwellen aus (11) in genau derselben Weise vor wie oben für die skalare Wellengleichung. Der wesentliche Unterschied besteht nur darin, daß jetzt die Wellenfunktion ein Vektor, und die in der Wellengleichung (11) enthaltenen Operatoren lineare Vektorfunktionen sind. Ebenso müssen daher auch für die Winkeloperatoren — welche wir für die Formulierung der simultanen Eigenwertgleichungen analog (6) und (7) benötigen — lineare Vektorfunktionen in Betracht gezogen werden. Zwar sind unsere früheren Operatoren, m_z und $\mathfrak{m}^2$, als Skalare auch lineare Vektorfunktionen, jedoch unbrauchbar, da sie mit rot rot nicht kommutieren. Ein kleiner Zusatz stellt jedoch die Vertauschbarkeit her. Wir bilden

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} + \mathfrak{s}\,, \tag{13}$$

worin

$$\mathfrak{s} = i\,I\times \qquad (s_x = i\,\mathfrak{e}_x\times\,; \quad s_y = i\,\mathfrak{e}_y\times\,; \quad s_z = i\,\mathfrak{e}_z\times)\,. \tag{14}$$

I ist die Einheitsdyade, $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$ die Einheitsvektoren in der x-, y-, z-Richtung. Es gelten die Operatorgleichungen:

$$n_z\operatorname{rot} = \operatorname{rot} n_z \tag{15}$$

und daher auch

$$\mathfrak{n}^2\operatorname{rot} = \operatorname{rot}\mathfrak{n}^2\,. \tag{16}$$

Das bedeutet, daß sowohl die Komponenten wie auch das Quadrat von $\mathfrak{n}$ mit dem Gleichungsoperator (11) vertauschbar sind. Ebenso sind

z-Komponente und Quadrat von $\mathfrak{n}$ unter sich vertauschbar, da die Drehmomentgleichungen (3) und (4) für $\mathfrak{n}$ — und auch für $\mathfrak{s}$ — genau so gelten wie für $\mathfrak{m}$. Dies weist gleichzeitig darauf hin, daß auch $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{n}$ Drehmomenten zuzuordnen sind. Einen recht deutlichen Anhaltspunkt über diese Zuordnung liefert die folgende Identität, welche für jede kartesische Komponente des Operators $\mathfrak{s}$ gilt:

$$s_z(s_z^2 - 1) = 0. \tag{17}$$

Die Komponenten von $\mathfrak{s}$ besitzen also die Eigenwerte 0 und ± 1, und dokumentieren sich damit als Spinmoment einer Partikel vom Spin 1. Wir werden daher $\mathfrak{m}$ als Bahndrehimpuls, $\mathfrak{s}$ als Spindrehimpuls[1] und $\mathfrak{n}$ als Gesamtdrehimpuls des Photons aufzufassen haben, wobei nur für den letzteren ein Erhaltungssatz gilt. — Den Zusammenhang von $\mathfrak{n}$ mit dem klassischen Drehimpuls des Feldes werden wir weiter unten herstellen; zunächst benützen wir den Operator $\mathfrak{n}$ um die Lösungen aufzusuchen. An Stelle von (6) und (7) treten jetzt die Gleichungen

$$n_z \mathfrak{E} = m \mathfrak{E}, \tag{18}$$

$$\mathfrak{n}^2 \mathfrak{E} = l(l+1)\mathfrak{E}. \tag{19}$$

Der Operator $\mathfrak{n}^2$ errechnet sich aus (13) und (14) zu

$$\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{m}^2 + 2i\,\mathfrak{m}\times + 2. \tag{20}$$

Die Eigenwerte von l und m sind ganzzahlig und durchlaufen genau dieselben Werte wie bei (6) und (7).

Lösung der Eigenwertgleichungen.

Ein Satz simultaner Lösungen von (11), (18) und (19) läßt sich unmittelbar angeben, wenn man beachtet, daß

$$n_z \mathfrak{m} = \mathfrak{m}\, m_z; \qquad \mathfrak{n}^2 \mathfrak{m} = \mathfrak{m}\, \mathfrak{m}^2. \tag{21}$$

Das heißt: durch Hinüberschieben über den Operator $\mathfrak{m}$ verwandelt sich der Drehimpuls mit Spin in den spinfreien. Damit ist gezeigt, daß

$$\mathfrak{E}_l^m \equiv \mathfrak{m}\, u_l^m \qquad [u_l^m \text{ siehe (9)}], \tag{22}$$

sowohl (18) als auch (19) erfüllt. Gleichzeitig ist auch (11) befriedigt, da (22) den beiden zu (11) äquivalenten Gleichungen (12) genügt; denn u_l^m befriedigt die Wellengleichung, und $\mathfrak{m}$ die Divergenzbedingung, da $\nabla \cdot \mathfrak{m} \equiv 0$. Weiterhin sieht man, daß die radiale Komponente von $\mathfrak{E}_m^l$ verschwindet ($\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{m} \equiv 0$). Also handelt es sich um magnetische Schwingungen (s. G. Mie l. c.).

Wir können in genau derselben Weise auch elektrische Schwingungen gewinnen, indem wir $\mathfrak{H}$ an Stelle von $\mathfrak{E}$ setzen. Wenn wir dann noch

[1] Auch das Quadrat von $\mathfrak{s}$ fügt sich dieser Deutung ein: $\mathfrak{s}^2 \equiv 2$.

aus (10) die fehlenden (magnetischen bzw. elektrischen) Feldstärken berechnen, erhalten wir die 2^l-Pole:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{elektrischer Multipol:}\\
&\mathfrak{E}_l^m\,(\text{el}) = \frac{1}{k}\operatorname{rot}\mathfrak{m}\,u_l^m; \qquad \mathfrak{H}_l^m\,(\text{el}) = -i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{m}\,u_l^m,\\
&\text{magnetischer Multipol:}\\
&\mathfrak{E}_l^m\,(\text{mag}) = \mathfrak{m}\,u_l^m; \qquad \mathfrak{H}_l^m\,(\text{mag}) = -i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cdot\frac{1}{k}\operatorname{rot}\mathfrak{m}\,u_l^m.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Dem elektrischen Multipol haben wir einen Faktor hinzugefügt, um bei Verwendung des gleichen u_l^m in beiden Fällen dieselbe Dimension zu erzielen. — Wir werden in einem späteren Absatz beweisen, daß in (23) sämtliche möglichen Lösungen der Gl. (11), (18) und (19) enthalten sind.

Zusammenhang mit den DEBYE*schen Potentialen.*

Die Multipollösungen (23) stehen in engem Zusammenhang mit den DEBYEschen Potentialen, deren Definitionsgleichungen nach J. MEIXNER[1] lauten

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E} &= \frac{1}{i\,\varepsilon}\operatorname{rot}\mathfrak{m}\,\Pi_1 + \omega\,\mathfrak{m}\,\Pi_2,\\
\mathfrak{H} &= -\,\omega\,\mathfrak{m}\,\Pi_1 + \frac{1}{i\,\mu}\operatorname{rot}\mathfrak{m}\,\Pi_2.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Der Vergleich mit (23) zeigt, daß man die elektrischen bzw. magnetischen Multipole erhält, indem man für Π_1 bzw. Π_2 die skalaren Multipole (9) einsetzt[2]. Die Vollständigkeit des Lösungssystems (23), welche wir im letzten Abschnitt beweisen werden, zeigt dann gleichzeitig, daß sich jede Lösung der MAXWELLschen Gleichungen, welche den nötigen Anforderungen bezüglich Stetigkeit und Verhalten im Unendlichen genügt, durch DEBYEsche Potentiale darstellen läßt.

Orthogonalität.

Die Orthogonalität der zu verschiedenen l oder m gehörigen Funktionen folgt direkt aus den Eigenwertgleichungen; aus (18) folgt nämlich

$$\operatorname{div}\left(\mathfrak{e}_z \times \mathfrak{r}\,\mathfrak{E}_{l'}^{m'*}\cdot\mathfrak{E}_l^m\right) = i\,(m - m')\,\mathfrak{E}_{l'}^{m'*}\cdot\mathfrak{E}_l^m. \tag{25}$$

---

[1] MEIXNER, J.: Z. Naturforsch. **3**a, 506 (1948).

[2] Auf den Zusammenhang zwischen Multipolen und DEBYEschen Potentialen hat mich freundlicherweise Herr Prof. MEIXNER hingewiesen; die Formeln (23) sind (in etwas anderer Schreibweise) das Ergebnis einer am MEIXNERschen Institut ausgeführten Diplomarbeit (F. M. WOLFF, Elektrodynamische Potentiale und Multipolstrahlung, Aachen 1948).

Bei einer Integration über den gesamten Raum verschwindet die linke Seite, also ist auch das Raumintegral der rechten Seite gleich Null — und das bedeutet, daß für $m \neq m'$ die Funktionen orthogonal sind. — Aus (19) folgt in analoger Weise

$$\{l(l+1) - l'(l'+1)\} \int \mathfrak{E}_{l'}^{m'*} \cdot \mathfrak{E}_l^m \, d\tau = 0. \tag{26}$$

Das bedeutet Orthogonalität für $l \neq l'$.

Damit ist die Orthogonalität sämtlicher verschiedener Eigenfunktionen (23) erwiesen mit Ausnahme des zum selben l und m gehörigen elektrischen und magnetischen Multipols; die Orthogonalität dieser beiden Funktionen folgt aber unmittelbar daraus, daß stets die eine eine gerade, die andere eine ungerade Funktion des Radiusvektors ist.

Drehimpuls.

Daß der Mittelwert des Operators $\mathfrak{n}$ der klassische Drehimpuls des Feldes ist, soll jetzt an der z-Komponente nachgewiesen werden. Man zeigt leicht, daß $\mathfrak{E}^* \cdot n_z \mathfrak{E}$ sich von $\mathfrak{E} \cdot n_z^* \mathfrak{E}^*$ nur durch eine vollständige Ableitung unterscheidet, so daß das Raumintegral beider Ausdrücke dasselbe ist (d. h. mit anderen Worten, daß $\mathfrak{n}$ ein reeller Operator ist). Um den Mittelwert von n_z zu ermitteln, berechnen wir zunächst die Summe dieser Ausdrücke. Aus (13) folgt

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{E}^* \cdot n_z \mathfrak{E} + n_z^* \mathfrak{E}^* \cdot \mathfrak{E} \\ &\quad = i\, \mathfrak{E} \cdot (\mathfrak{e}_z \times \mathfrak{r} \cdot \nabla) \mathfrak{E}^* - i\, \mathfrak{E}^* \cdot (\mathfrak{e}_z \times \mathfrak{r} \cdot \nabla) \mathfrak{E} - 2i\, \mathfrak{e}_z \cdot \mathfrak{E}^* \times \mathfrak{E}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

und hieraus durch Umformung

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{E}^* \cdot n_z \mathfrak{E} + n_z^* \mathfrak{E}^* \cdot \mathfrak{E} \\ &\quad = i\, \mathfrak{e}_z \cdot \mathfrak{r} \times [\mathfrak{E} \times \operatorname{rot} \mathfrak{E}^* - \mathfrak{E}^* \times \operatorname{rot} \mathfrak{E}] + i \operatorname{div} [\mathfrak{E}^* \times \mathfrak{E}] \times [\mathfrak{e}_z \times \mathfrak{r}]. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Wenn wir (28) über den gesamten Raum integrieren, werden — wie oben bemerkt — die beiden Summanden der linken Seite gleich, und das div-Glied der rechten Seite fällt fort. Drücken wir noch mit Hilfe der zweiten MAXWELLschen Gl. (10) rot $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{H}$ aus, dann erhalten wir

$$2\varepsilon \int \mathfrak{E}^* \cdot \frac{n_z}{\omega} \mathfrak{E} \, d\tau = \frac{\mathfrak{e}_z}{c^2} \cdot \int \mathfrak{r} \times [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}^* + \mathfrak{E}^* \times \mathfrak{H}] \, d\tau. \tag{29}$$

Hier steht auf der rechten Seite genau der Gesamtdrehimpuls einer Welle mit den reellen Feldstärken $\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}^*$. Die Gesamtenergie einer solchen Welle ist $2\varepsilon \int \mathfrak{E}^* \cdot \mathfrak{E} \, d\tau$, so daß der Drehimpuls sich zu der Energie verhält wie der Mittelwert von n_z zu ω. Einem Energiequant $\hbar\omega$ kommt also der z-Drehimpuls $\hbar n_z$ zu, die Eigenwerte $n_z = m$ der Multipole sind genau die zugehörigen Drehimpulsquantenzahlen.

Vollständigkeit des Lösungssystems.

Um die Vollständigkeit des Lösungssystems (23) nachzuweisen, gehen wir von den elektrischen und magnetischen Multipolen durch Linearkombination zu den rechts- und linkszirkularpolarisierten Lösungen über. Man kann allgemein jede Lösung von (11) in folgender Weise zerlegen:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_R + \mathfrak{E}_L \tag{30}$$

mit

$$\mathfrak{E}_R = \frac{k - \mathrm{rot}}{2k}\,\mathfrak{E}; \qquad \mathfrak{E}_L = \frac{k + \mathrm{rot}}{2k}\,\mathfrak{E}. \tag{31}$$

Wegen

$$(k + \mathrm{rot})\,(k - \mathrm{rot})\,\mathfrak{E} = (k - \mathrm{rot})\,(k + \mathrm{rot})\,\mathfrak{E} = (k^2 - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot})\,\mathfrak{E} = 0 \tag{32}$$

gilt

$$(\mathrm{rot} + k)\,\mathfrak{E}_R = 0; \qquad (\mathrm{rot} - k)\,\mathfrak{E}_L = 0. \tag{33}$$

Dies ist die Gleichung der rechts- bzw. linkszirkularpolarisierten Wellen, d. h. aller Lösungen, welche sich aus ebenen Wellen dieser Polarisation überlagern lassen[1].

Wenden wir (31) auf (23) an, dann erhalten wir aus den elektrischen ebenso wie aus den magnetischen Multipolen die folgenden zirkularpolarisierten Lösungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_R &= (k\,\mathfrak{m} - \nabla \times \mathfrak{m})\,u_l^m, \\ \mathfrak{E}_L &= (k\,\mathfrak{m} + \nabla \times \mathfrak{m})\,u_l^m. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Es gilt nunmehr, die Vollständigkeit *dieses* Systems von Lösungen nachzuweisen, dann ist die Vollständigkeit von (23), aus welchem sich (34) linear zusammensetzt, ebenfalls erwiesen. — (34) läßt sich nach u_l^m auflösen; multiplizieren wir nämlich skalar mit $\mathfrak{m}$, so verschwindet der jeweils zweite Summand wegen $\mathfrak{m} \cdot \nabla \times \mathfrak{m} \equiv 0$, und wegen (7) resultiert für $l \neq 0$

$$u_l^m = \frac{1}{k\,l\,(l+1)}\,\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{E}. \tag{35}$$

Wir unterdrücken hierin den Index R, L. Setzt man (35) in (34) ein, dann resultiert:

$$\mathfrak{E} = \frac{k\,\mathfrak{m} \mp \nabla \times \mathfrak{m}}{k\,l\,(l+1)}\,\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{E}. \tag{36}$$

Wir zeigen zunächst, daß diese Identität für *jede* simultane Lösung von (33), (18) und (19) gilt. Den zweiten Summanden formen wir mittels (2) und (33) um und erhalten für die rechte Seite von (36)

$$\frac{\mathfrak{m}\,\mathfrak{m} \cdot - i\,\nabla \times \mathfrak{m}\,\mathfrak{r} \cdot}{l\,(l+1)}\,\mathfrak{E} \equiv \frac{\mathfrak{m}^2 + 2i\,\mathfrak{m} \times + 2}{l\,(l+1)}\,\mathfrak{E}. \tag{37}$$

[1] Allgemein hat man $\left(\mathrm{rot} \pm \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathfrak{E} = 0$ als Gleichung der rechts- bzw. linkspolarisierten Wellen.

Hierin haben wir nochmals umgeformt mittels

$$\left.\begin{aligned} -i\nabla\times\mathfrak{m}\,\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{E} &= i\,(\mathfrak{m}\times-2i)\,\nabla\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{E} = -(\mathfrak{m}\times-2i)\,(\mathfrak{m}\times-i)\,\mathfrak{E} \\ &= \mathfrak{m}^2\,\mathfrak{E}-\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{E}+2i\,\mathfrak{m}\times\mathfrak{E}+2\,\mathfrak{E}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Auf der rechten Seite von (37) steht im Zähler genau $\mathfrak{n}^2$ — s. (20) —, so daß sich nach (19) in der Tat $\mathfrak{E}$ ergibt, somit (36) für jede Lösung des simultanen Eigenwertproblems gültig ist. Nunmehr wenden wir auf (36) die Eigenwertgleichung (19) an:

$$0=\left\{\mathfrak{n}^2-l\,(l+1)\right\}(k\,\mathfrak{m}\mp\nabla\times\mathfrak{m})\,\frac{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{E}}{l\,(l+1)}\,. \tag{39}$$

Den ersten Faktor können wir hierin über den zweiten hinwegziehen, wenn wir beachten, daß $\mathfrak{n}^2$ mit $\nabla\times$ vertauschbar ist und sich beim Wegziehen über $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{m}^2$ verwandelt [s. (16) und (21)]. Wenn wir dann noch skalar mit $\mathfrak{m}$ multiplizieren, erhalten wir

$$\mathfrak{m}^2(\mathfrak{m}^2-l\,(l+1))\,\frac{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{E}}{l\,(l+1)}=0\,. \tag{40}$$

Daraus folgt aber, daß $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{E}$ eine Kugelflächenfunktion vom Index l ist [bis auf eine zusätzliche winkelunabhängige Funktion, welche beim Einsetzen in (36) wieder wegfällt]. — In ganz derselben Weise kann aus der Eigenwertgleichung (18), angewandt auf (36), gefolgert werden, daß die φ-Abhängigkeit von $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{E}$ gleich $\exp(i\,m\,\varphi)$ ist, und da $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{E}$ gleichzeitig der Gl. (1) gehorcht, erweist sich allgemein

$$\frac{\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{E}}{l\,(l+1)}=u_l^m\,. \tag{41}$$

Somit ist (34) in der Tat die allgemeine Lösung des Problems, und daher sind auch die Multipole (23) vollständig. — Für den Fall $l=0$, auf welchen die vorstehende Untersuchung nicht anwendbar ist, lautet die allgemeine Lösung von (19) $\mathfrak{E}=\mathfrak{r}\,F(r)$, rot $\mathfrak{E}$ verschwindet also und (11) ist nicht lösbar. Daher fällt der einfache „Pol" in der Elektrodynamik aus, es gibt nur Dipole und höhere Multipole. Gerade dies ist auch die Aussage von (23), so daß wir mit diesen Formeln alle Multipole ohne Ausnahme richtig wiedergegeben haben.